环 也有一点儿域

环：设R是一个非空集合，如果在R上定义了两个代数运算“+”（加法）和“·”（乘法），并且满足：

1)R关于加法构成一个交换群 ①封闭(加法) ②结合律(加法) ③单位元(零元) ④逆元(负元) ⑤交换律

2)乘法结合律满足 ①封闭(乘法) ②结合律(乘法)

3)乘法对加法满足左右分配律 ①左分配 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ ②右分配 $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$

则称(R,+,·)为一个环，或简称R为环

注：

环关于加法运算的单位元一般记作0，

环R的元素a关于加法的逆元称为a的负元，记作$-a$

若环R的乘法满足交换律，则称R为交换环

若环R中存在单位元，则称R是一个有单位元的环

若环R是一个有单位元的环，对于R的任意元素a，如果a关于乘法存在逆元，则称a是环R的一个可逆元或单位

环R的所有可逆元关于环R的乘法构成群，称为环R的单位群，记作U(R)

题型一：环的证明与基本运算

环的运算性质： 负号表示负元

1) $a\cdot 0=0\cdot a=0$； 2) $-(-a)=a$；

3) $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-ab$； 4) $(-a)\cdot(-b)=ab$

注：环的运算**不满足**以下性质

① 若a，$b\neq 0$，则$ab\neq 0$ Z_6: $\bar{4}\cdot\bar{3}=\bar{0}$ $\bar{4}\neq\bar{2}$

② 若$xa=xb$或$ay=by$，则$a=b$ $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$

例1：【题1】证明：集合$Z[\sqrt{3}]=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in Z\}$关于通常数的加法和乘法构成一个有单位元的交换环

<思路>

①证明$Z[\sqrt{3}]$关于加法构成一个群

②证明$Z[\sqrt{3}]$关于乘法构成半群 →封闭、结合律

③验证分配律，单位元，是否可交换

题型二：子环判断

子环：设R是一个环，S是R的一个非空子集，若S关于R的运算也构成环，则称S是R的一个子环，记作S < R

注：环和子环的单位元无关

环R	单位元	子环S	单位元
Z	√	2Z	×
2Z	×	$2Z_6$	√
R	√	Q	√
Z_{12}	√	$3Z_{12}$	√

考点1 环的概念

子环判定定理

① $\begin{cases}\forall a,b\in H,\ ab\in H\\ \forall a\in H,\ a^{-1}\in H\end{cases}$ ② $\forall a,b\in H,\ ab^{-1}\in H$

子环判定定理：设R是一个环，S是R的非空子集，则S是R的子环的充分必要条件是：

①(S,+)是(R,+)的子加群（对任意的a，b∈S，有a-b∈S） 减法封闭

②S关于R的乘法封闭，即对任意的a，b∈S，有ab∈S 乘法封闭

例1：【题2】设R为环，证明：$C(R)=\{r\in R|rs=sr,\forall s\in R\}$

为R的一个子环，称为环的中心 环中所有可与其它元素乘法交换的元素

证明：1) 首先要说明不是空集

对于$\forall x\in R$，有$0\cdot x=x\cdot 0=0$

$\therefore 0\in C(R)$

2) 减法封闭

$\forall a,b\in C(R)$，$x\in R$，有

$(a-b)x=ax-bx=xa-xb=x(a-b)$

属于环C(R)

3) 乘法封闭

$(ab)x=a(bx)=a(xb)=(ax)b=(xa)b=x(ab)$

注：设R_1,R_2是两个环，定义环的直和 ⊕为

$$R=R_1\oplus R_2=\{(a_1,a_2)|a_1\in R_1,a_2\in R_2\}$$

定义运算$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)$；$(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_2b_2)$

则R关于上面定义的运算构成一个环

题型三：整环

零因子：设R为环，a，b是R的两个非零元素，如果$a\cdot b=0$，则称a是环R的一个左零因子，b是R的一个右零因子

Z_8中：$\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{0}$

左 右

(注：环的左零因子一般不等于右零因子，但左右零因子要么同时有，要么同时没有，即没有左零因子的环也没有右零因子，反之亦然；我们称没有零因子的环为无零因子环)

整环：无零因子的，有单位元e≠0的交换环称为整环

① ② ③ ⓪先证明为环

例1：【题3】证明：全体形如$Z[i]=\{a+bi|a,b\in Z\}$的复数关于复数的运算构成整环，并求其单位

单位与单位元不一样哦.

单位：又叫可逆元，为乘法的可逆元

证明：对任意的$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di\in Z[i]$，

由于 $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i\in Z[i]$；$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i\in Z[i]$，

所以$Z[i]$是C的子环，且$Z[i]$是一个交换环，

由于C中无零因子，则$Z[i]$中无零因子

易知$1+0i=1\in Z[i]$为$Z[i]$的单位元

综上，$Z[i]$是一个整环，下求$Z[i]$的单位

设$\alpha=a+bi$是$Z[i]$的任一单位，则存在$\beta=c+di\in Z[i]$，使得$\alpha\beta=1$

$\bar{\alpha}=a+bi$

于是 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}=\alpha\beta\overline{\alpha\beta}=1\cdot 1=1$

由于 $a,b,c,d\in Z$，则 $a=\pm 1,b=0$ 或 $a=0,b=\pm 1$

则$Z[i]$的单位有1，-1，i，$-i$

题型四：域与除环

加法交换群+乘法群　　Z[i]　　单位 ±1，±i

除环：设R是一个有单位元$e\neq 0$的环，如果R中每个非零元都可逆，则称R是一个除环；可交换的除环称为域，非交换的除环称为体

（注：可逆元一定不是零因子，所以除环一定是无零因子环）

$(a\cdot b\neq 0)$

a可逆　$a^{-1}\cdot a\cdot b=0=a^{-1}\cdot 0=0$

$=e\cdot b=0\Rightarrow b=0$

下面我们着重讨论域：

① 域是一种对加法和乘法全部构成交换群，且满足分配律的环；

② 域必定是整环；

③ 有限整环必为域；

④ 域可以定义我们熟知的加减乘除四种运算；

⑤ 常见的域有有理数域，实数域，复数域，剩余类环Z_p（当p为素数时）等；

题型五：理想与商环

摆了，不写了。