

第七章 连分数

讨论实数的有理分数逼近以及该有理分数的构造

7.1 简单连分数

1. 简单连分数构造

例: 计算 $\sqrt{2}$

变形 $\sqrt{2}$ 是 $x^2 - 2 = 0$ 的根

$$x-1 = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2+(x-1)}$$

用有理数来近似。

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}} \dots \text{以此类推}$$

用有理分数来近似

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{49}{29} = 1.43193/63$$

最后, 列出 $\sqrt{2}$ 与 10 个有理数间的误差.

i	a_i	$\frac{P_i}{Q_i}$	$\sqrt{2} - \frac{P_i}{Q_i}$	i	a_i	$\frac{P_i}{Q_i}$	$\sqrt{2} - \frac{P_i}{Q_i}$
0	1	$\frac{1}{1}$	0.414 213 562	5	2	$\frac{99}{70}$	-0.000 072 152
1	2	$\frac{3}{2}$	-0.085 786 438	6	2	$\frac{239}{169}$	0.000 012 379
2	2	$\frac{7}{5}$	0.014 213 562	7	2	$\frac{577}{408}$	-0.000 002 124
3	2	$\frac{17}{12}$	-0.002 453 105	8	2	$\frac{1393}{985}$	0.000 000 364
4	2	$\frac{41}{29}$	0.000 420 459	9	2	$\frac{3363}{2378}$	-0.000 000 063

将对 $\sqrt{2}$ 的有理分数近似推广到任意的实数

① 简单连分数构造

给定一个实数 x , 构造如下:

$$\text{可令 } a_0 = [x], \quad x_0 = x - a_0$$

$$\text{若 } x_0 = 0, \text{ 则终止; 否则 } a_1 = \left[\frac{1}{x_0} \right], \quad x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1$$

$$\text{若 } x_1 = 0, \dots; \text{ 否则 } a_2 = \left[\frac{1}{x_1} \right], \quad x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2$$

⋮

继续下去, 得 a_k, x_k

$$\text{由此得 } x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

无限简单连分数记作 $[a_0, a_1, a_2, \dots]$

有限 $\text{---} [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$

知道这个就好了, 这一章到此为止.

$$x = a_0 + \frac{x_0}{1} \text{ 小数部分}$$

$$\text{" } \frac{1}{a_1 + x_1} \text{ 余为 } \frac{x_1}{1}$$