第二章课后习题

P88. 习题(1), (5), (6), (17)

P89. 习题(16), (19), (23), (24)

(1) ① 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 为9的一个完全剩余系
9, 1, 11, 3, 13, 5, 15, 7, 17 为其的一个奇数转换.

② 0, 10, 2, 12, 4, 14, 6, 16, 8 为其的一个偶数转换

③ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 为模10的一个完全剩余系.
由于10为偶, 无法改变其中元素的奇偶性, 故无法实现.

(5) (i) $1 \pmod 5$

$\cdots \underbrace{1, 6, 11}, 16, -4, -9 \cdots$ 为其 $1 \bmod 5$ 剩余类
在 mod 15 的剩余类集合中

故 $1 \pmod 5 = 1 \pmod{15} + 6 \pmod{15} + 11 \pmod{15}$

(ii) $-4, \underbrace{6, 16, 26, 36, \cdots, 116}, 126, \cdots$

故 $6 \pmod{10} = 6 \pmod{120} + 16 \pmod{120} + 26 \pmod{120} + \cdots + 116 \pmod{120}$

(iii) $6 \pmod{10} = 6 \pmod{80} + 16 \pmod{80} + \cdots + 76 \pmod{80}$

(6) 求 $2^{20080509} \bmod 7$

$2^3 \equiv 1 \bmod 7$

求 $20080509 \bmod 3 \Rightarrow$ 特殊方法: $20080509 \bmod 3$
$= (2+8+5+9) \bmod 3 = 0$

$\therefore 2^{20080509} \equiv 1 \bmod 7$ $\quad\therefore$ 为周六

(17) ① $1843581 \equiv 1+8+4+3+5+8+1 \pmod 3$
$1843581 \equiv 1+8+4+3+5+8+1 \pmod 9$

② 同理

(16) ① $2^{32} \pmod{47}$

$2^8 = 256 \equiv 21 \bmod 47$

$$2^{32} \equiv 21^4 \mod 47$$
$$\equiv (441)^2 = (47\times 9+18)^2 \equiv 18^2 \mod 47 \equiv 42 \mod 47$$

② $2^{47} \pmod{47}$

$(47,2)=1$

由费马小定理得 $2^{47} \equiv 2 \pmod{47}$

③ $2^{200} \pmod{47}$

由欧拉定理得 $2^{46} \equiv 1 \pmod{47}$

$$2^{200} \equiv 2^{46\times 4+16} \equiv 2^{16} \equiv 441 \equiv 42 \mod 47$$

(19) $(364701244)_8$　　多找进制与给的几个数之间的关系!

$\because 8^2 \equiv -1 \mod 5\times 13$

$\therefore 8^4 \equiv 1 \mod 5\times 13$

$\therefore$ 得 $8^{2(2k-1)} \equiv -1 \mod 5\times 13$, $8^{2(2k)} \equiv 1 \mod 5\times 13$

中间的 $8^3 \equiv -8 \mod 5\times 13$

$8^5 \equiv 8 \mod 5\times 13$

故原式 $\equiv (4\times 1 + 4\times 8 - 2\times 1 - 1\times 8 + 7\times 8 - 4\times 1 - 6\times 8 + 3\times 1) \mod 5\times 13$

$\equiv 33 \pmod{5\times 13}$

$\therefore$ 原式 $\equiv 33 \equiv 3 \mod 5$

原式 $\equiv 33 \equiv 7 \mod 13$

(23) $2^{20040118} \pmod 7$

$2^3 \equiv 1 \mod 7$

求 $20040118 \mod 3 = (2+4+1+1+8) \equiv 1 \mod 3$

$\therefore 2^{20040118} \equiv 2 \mod 7$

(24) $3^{1000000} \mod 7$

$3^3 = 27 \equiv -1 \mod 7$

$1000000 \div 3 = 333333 \cdots 1$

$\therefore 3^{1000000} \equiv (-1)^{333333} \cdot 3 \pmod 7 = 4 \pmod 7$