第六章课后习题

P21 1. (1), (5), (9), (14), (17), (19)

(1) 91是对于基3的伪素数

① $91=7\times13$ 是一个奇合数

② $(91,3)=1$

③ $\begin{cases} 3^6\equiv1 \pmod 7 \\ 3^3\equiv1 \pmod{13} \end{cases}$

$\therefore$ 有 $3^6\equiv1 \pmod{91}$

$\therefore$ 有 $3^{90}\equiv(3^6)^{15}\equiv1 \pmod{91}$

$\therefore$ 91是对于基3的伪素数

(5) 1105是Carmicheal数.

$1105=5\times13\times17$ 为奇合数

设 $(b,1105)=1$, 则有 $\begin{cases} (b,5)=1 \\ (b,13)=1 \\ (b,17)=1 \end{cases}$

$\therefore$ 由费马小定理得 $\begin{cases} b^4\equiv1 \pmod 5 \\ b^{12}\equiv1 \pmod{13} \\ b^{16}\equiv1 \pmod{17} \end{cases}$

$\therefore$ 有 $b^{\mathrm{lcm}[4,12,16]}\equiv1 \pmod{1105}$

即 $b^{48}\equiv1 \pmod{1105}$

$\therefore b^{1104}\equiv(b^{48})^{23}\equiv1 \pmod{1105}$ 对于任意整数b成立

$\therefore$ 证毕.

(9) 25是基于7的强伪素数

$25=5\times5$ 为奇合数.

$25-1=24=3\times2^3$

$7^3 = 343 \equiv -7 \pmod{25}$

$(7^3)^2 \equiv 49 \equiv -1 \pmod{25}$ 满足条件

$\therefore$ 证毕

(14) 整数561是对于基2的Euler伪素数

$561 = 3 \times 11 \times 17$ 为奇合数

又 $\because \begin{cases} 2^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \\ 2^{16} \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$ $\therefore 2^{80} \equiv 1 \pmod{561}$

$\therefore 2^{560} = (2^{80})^7 \equiv 1 \pmod{561}$

$\left(\frac{2}{561}\right) = (-1)^{\frac{561^2-1}{8}} = 1 = 2^{560} \pmod{561}$

$\therefore$ 证毕

(17) 1387是对于基2的伪素数，但不是对于基2的强伪素数
①　　②

① $1387 = 19 \times 73$ 为奇合数

$2^{1386} \equiv 1 \pmod{1387}$

$\therefore$ ①证毕

② $1386 = 693 \times 2$

$2^{693} \not\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{1387}$

$\therefore$ ②证毕

(19) 2532601是对于基2,3,5的强伪素数

2532601是一个奇合数.

$2532601 - 1 = 2532600 = 158287 5 \times 2^4$

同上计算, 略