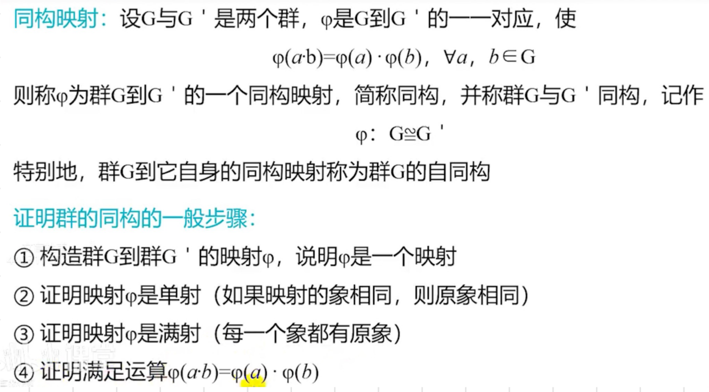
群 中等题型总结

题型一：证明群的同构



同构映射： 设G与G＇是两个群，φ是G到G＇的一一对应，使

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)，\forall a，b\in G$$

则称φ为群G到G＇的一个同构映射，简称同构，并称群G与G＇同构，记作

$$\varphi：G\cong G'$$

特别地，群G到它自身的同构映射称为群G的自同构

证明群的同构的一般步骤：

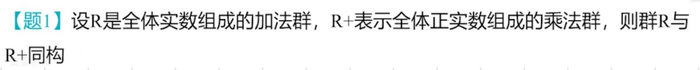
① 构造群G到群G＇的映射φ，说明φ是一个映射

② 证明映射φ是单射（如果映射的象相同，则原象相同）

③ 证明映射φ是满射（每一个象都有原象）

④ 证明满足运算$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

例1：



【题1】设R是全体实数组成的加法群，R+表示全体正实数组成的乘法群，则群R与R+同构

1) 找到一个映射从 全体实数 → 全体正实数

例：设映射 $\varphi: x\to 2^x$，$\forall x\in R$，显然是 $R\to R^+$ 的一个映射

2) 证明一一对应关系 {

单射：$\forall x,y\in R$，若 $2^x=2^y$，则 $x=y$

则φ是单射

满射：$\forall r\in R^+$，$\exists \log_2 r\in R$，使 $\varphi(\log_2 r)=2^{\log_2 r}=r$

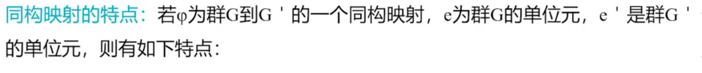
则φ是满射

3) 证明满足运算 $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

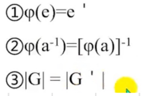
$\forall x,y\in R$

$\varphi(x+y)=2^{x+y}=2^x2^y=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ 满足运算

$$\frac{\text{加法群}}{\text{乘法群}}$$



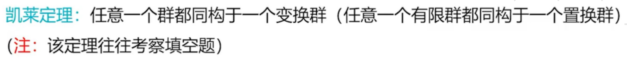
同构映射的特点： 若φ为群G到G＇的一个同构映射，e为群G的单位元，e＇是群G＇的单位元，则有如下特点：



①$\varphi(e)=e'$

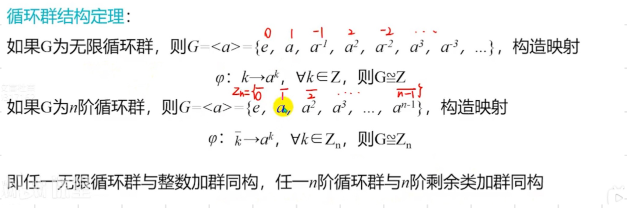
②$\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}$

③$|G|=|G'|$



凯莱定理： 任意一个群都同构于一个变换群（任意一个有限群都同构于一个置换群）

（注：该定理往往考察填空题）



循环群结构定理：

如果G为无限循环群，则$G=<a>=\{\overset{0}{e}，\overset{1}{a}，\overset{-1}{a^{-1}}，\overset{2}{a^2}，\overset{-2}{a^{-2}}，\overset{\cdots}{a^3}，a^{-3}，\ldots\}$，构造映射

$$\varphi：k\to a^k，\forall k\in Z，则G\cong Z$$

如果G为n阶循环群，则$G=<a>=\{\overset{Z_n=\{\bar{0}}{e}，\overset{\bar{1}}{a}，\overset{\bar{2}}{a^2}，\overset{\cdots}{a^3}，\ldots，\overset{\overline{n-1}\}}{a^{n-1}}\}$，构造映射

$$\varphi：\bar{k}\to a^k，\forall k\in Z_n，则G\cong Z_n$$

即任一无限循环群与整数加群同构，任一n阶循环群与n阶剩余类加群同构

题型二：群的陪集

群的陪集：设G为群，H是G的子群，对于G中的任意元素a，称集合：

$$aH=\{ah|h\in H\}；\ Ha=\{ha|h\in H\}$$

为H在其G中的左、右陪集

陪集不一定是群，可能只是个集合

（注：由定义直接观察到①$a\in aH$ ②$aH=H \Leftrightarrow a\in H$）

例1：【题3】在整数加群Z中，求子群H=<6>的所有左陪集

证明：（首先明确，现在讨论的运算均为加法，所以aH此时是a+H）

由于H=<6>表示由6生成的群，即H={…，-12，-6，0，6，12，…}

则左陪集分别为：

0+<6>={…，-12，-6，0，6，12，…}= 只有这个构成群

1+<6>={…，-11，-5，1，7，13，…}　6k+1

2+<6>={…，-10，-4，2，8，14，…}　6k+2

3+<6>={…，-9，-3，3，9，15，…}

4+<6>={…，-8，-2，4，10，16，…}

5+<6>={…，-7，-1，5，11，17，…}

观察这道题目的特点，我们引出下面关于陪集很重要的几条结论：

①群的陪集不一定是群的子群，比如上题中只有0+<6>是群的子群，这是因为0∈<6>，所以我们有个结论：若H是群G的子群，陪集aH是群G的子群当且仅当a∈H

②此外，我们注意到不同的陪集之间是没有相交的元素的，并且所有陪集的并就是全集，所以一个群G关于某一子群H的所有陪集构成群G的一个分类，也就是说，群G的关于某一子群H的陪集aH和bH要么完全一样，要么完全不一样

③上题中每个陪集的元素都是"一样多"的，所以不同陪集的元素个数(或基数)必定相等，并且都等于H（因为H也是群的一个陪集）即群G的关于某一子群H的全部陪集构成群H的一个分类，并且是均分

例2：【题4】设集合A={1,2,3}，G是A上的置换群，H是G的子群，H={(1),(12)}，写出H的所有左陪集　S_3

解：由题，G就是三次对称群S_3={(1)，(13)，(23)，(12)，(123)，(132)}　大致记一下

(13)(1)=(13)　(123)(1)=(123)

(13)(12)=(123)　(123)(12)=(13)

其左陪集为：

(1)H=(12)H=H={(1),(12)};

(13)H=(123)H={(123),(13)};

(23)H=(132)H={(132),(23)}

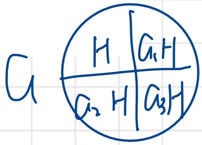
不是一个群，连单位元都没有

(23)H = (23)(1)　　(23)(12) = (132)

拉格朗日定理：若G是有限群，H是G的子群，则|G|=|H|[G:H]

其中[G:H]是群G的关于子群H的不同陪集的个数，称为（H在G中的）指数

（注：由拉格朗日定理可知，任一子群的阶都是群阶数的因数）



例3: 【题5】若群G的阶是48，则G的真子群的阶不可能是（C）

A.12　B.16　C.18　D.24

由这個得，一定能被整除

例4: 【题6】若ord a=30，则<a^4>在<a>中有(2) 个左陪集

$\langle a\rangle = \{e, a, a^2, a^3, \cdots, a^{29}\}$ 总个数 30个

【题6】若ord a=30，则<a^4>在<a>中有(2) 个左陪集

$\langle a^4\rangle = \{a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}, a^{24}, a^{28}, a^2, a^6, a^{10}, a^{14}, a^{18}, a^{22}, a^{26}, e\} = \langle a^2\rangle$

15个元素

$\text{ord}\, a = n$

$\text{ord}\, a^m = \frac{n}{(m,n)}$　　$\text{ord}\, a^4 = \frac{30}{(4,30)} = 15$

陪集个数 $= \frac{30}{15} = 2$　$\begin{cases} a\langle a^4\rangle = \langle a^3\rangle \\ a^2\langle a^4\rangle = \langle a^4\rangle \end{cases}$

左右陪集一般不相等，但个数一定是相等的

题型三：正规子群与商群

正规子群：设H是群G的子群，若对于每个a∈G，都有aH=Ha，则称子群H是群G的一个正规子群（或不变子群），记作H ◁ G，若群G只有单位元群和群G本身这两个正规子群，则称G是单群。

根据定义，我们给出以下结论：

① 若群G是交换群，则群G的所有子群都是正规子群

② 若子群H在群G的指数[G:H]=2，则群必为正规子群（对半分的子群必为正规子群）

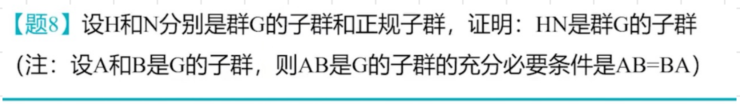
③正规子群无传递性，即H◁K且K ◁ G不能推出H ◁ G

证明子群H是正规子群的一般方法：

①由正规子群的定义aH=Ha可知，只需证明aHa^{-1}=H

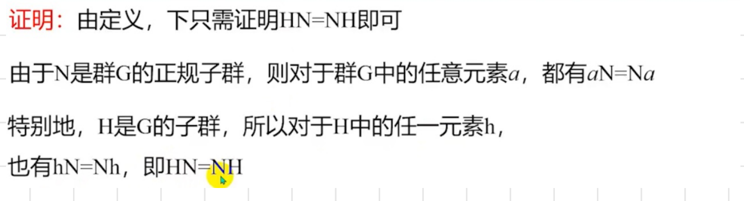
②已知H ⊆ aHa^{-1}（当a=e时就是H），只需证明aha^{-1}∈H，∀h∈H

例1：



【题8】设H和N分别是群G的子群和正规子群，证明：HN是群G的子群

（注：设A和B是G的子群，则AB是G的子群的充分必要条件是AB=BA）

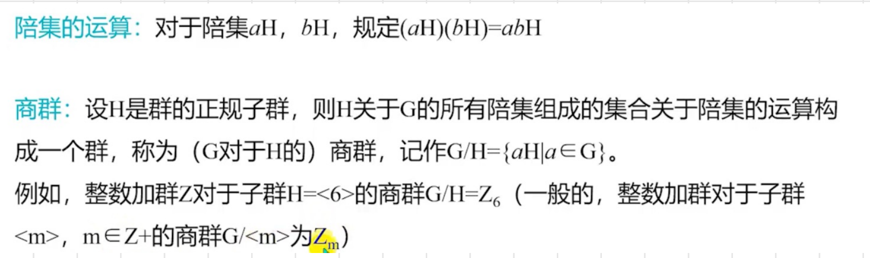


证明：由定义，下只需证明HN=NH即可

由于N是群G的正规子群，则对于群G中的任意元素a，都有aN=Na

特别地，H是G的子群，所以对于H中的任一元素h，

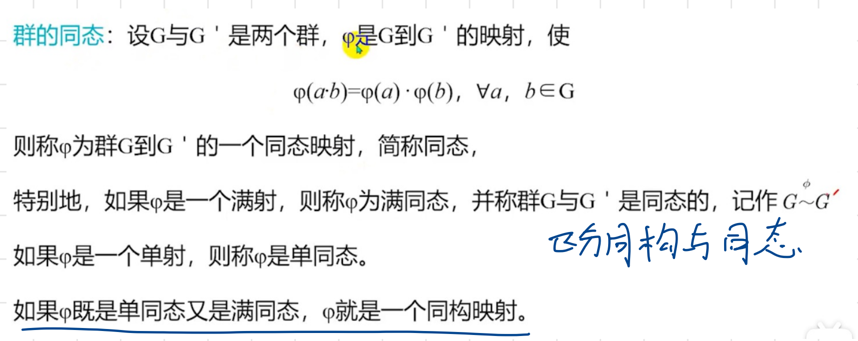
也有hN=Nh，即HN=NH



陪集的运算：对于陪集aH，bH，规定(aH)(bH)=abH

商群：设H是群的正规子群，则H关于G的所有陪集组成的集合关于陪集的运算构成一个群，称为（G对于H的）商群，记作G/H={aH|a∈G}。

例如，整数加群Z对于子群H=<6>的商群G/H=Z_6（一般的，整数加群对于子群<m>，m∈Z+的商群G/<m>为Z_m）



群的同态：设G与G＇是两个群，φ是G到G＇的映射，使

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)，\forall a，b\in G$$

则称φ为群G到G＇的一个同态映射，简称同态，

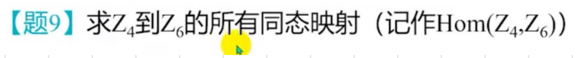
特别地，如果φ是一个满射，则称φ为满同态，并称群G与G＇是同态的，记作$G\overset{\phi}{\sim}G'$

如果φ是一个单射，则称φ是单同态。

如果φ既是单同态又是满同态，φ就是一个同构映射。

区分同构与同态.

例2：

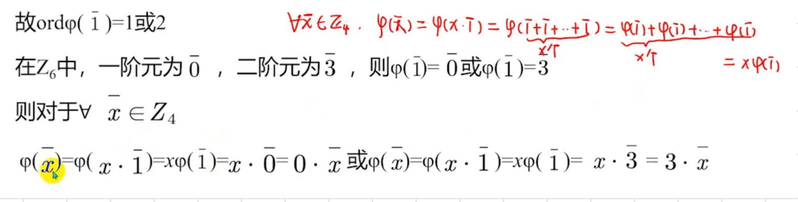


【题9】求Z_4到Z_6的所有同态映射（记作Hom(Z_4,Z_6)）

Z_4 生成元 $\bar{1}$, ord $\bar{1}$ = 4

某一同态映射 φ, ord φ($\bar{1}$) | $|Z_6|$ = 6 且 ord φ($\bar{1}$) | ord $\bar{1}$ = 4

∴ ord φ($\bar{1}$) = 1 或 2



故ordφ($\bar{1}$)=1或2

$\forall \bar{x}\in Z_4$. $\varphi(\bar{x})=\varphi(x\cdot\bar{1})=\varphi(\underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}}_{x个})=\underbrace{\varphi(\bar{1})+\varphi(\bar{1})+\cdots+\varphi(\bar{1})}_{x个}$ $=x\varphi(\bar{1})$

在Z_6中，一阶元为$\bar{0}$，二阶元为$\bar{3}$，则φ($\bar{1}$)= $\bar{0}$或φ($\bar{1}$)=$\bar{3}$

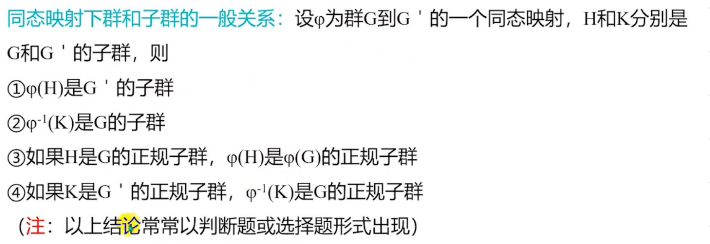
则对于$\forall\ \bar{x}\in Z_4$

$\varphi(\bar{x})=\varphi(x\cdot\bar{1})=x\varphi(\bar{1})=x\cdot\bar{0}=0\cdot\bar{x}$ 或 $\varphi(\bar{x})=\varphi(x\cdot\bar{1})=x\varphi(\bar{1})=x\cdot\bar{3}=3\cdot\bar{x}$

∴ Hom(Z_4, Z_6) = {ϕ_a | $\bar{x}\to a\bar{x}$, a = 0,3}

找单位元很重要！

例3:



同态映射下群和子群的一般关系：设φ为群G到G＇的一个同态映射，H和K分别是G和G＇的子群，则

①$\varphi(H)$是G＇的子群

②$\varphi^{-1}(K)$是G的子群

③如果H是G的正规子群，$\varphi(H)$是$\varphi(G)$的正规子群

④如果K是G＇的正规子群，$\varphi^{-1}(K)$是G的正规子群

（注：以上结论常常以判断题或选择题形式出现）